AI2613: 随机过程

上海交通大学

张驰豪

2021年2月22日

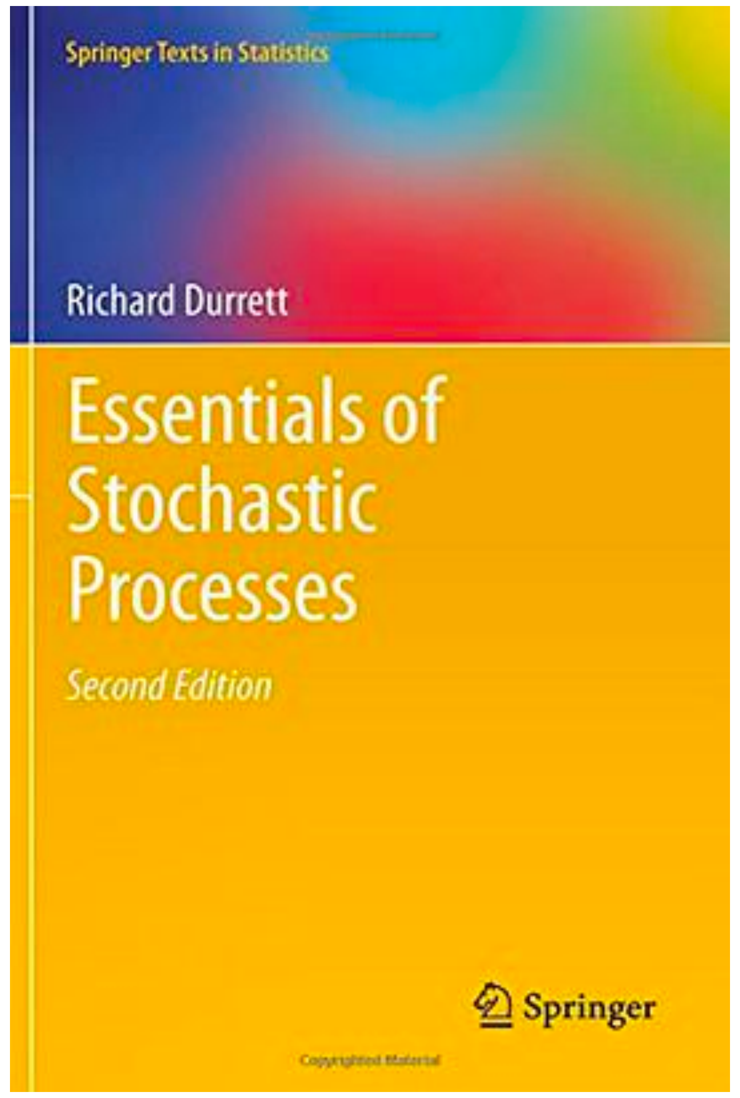
课程信息

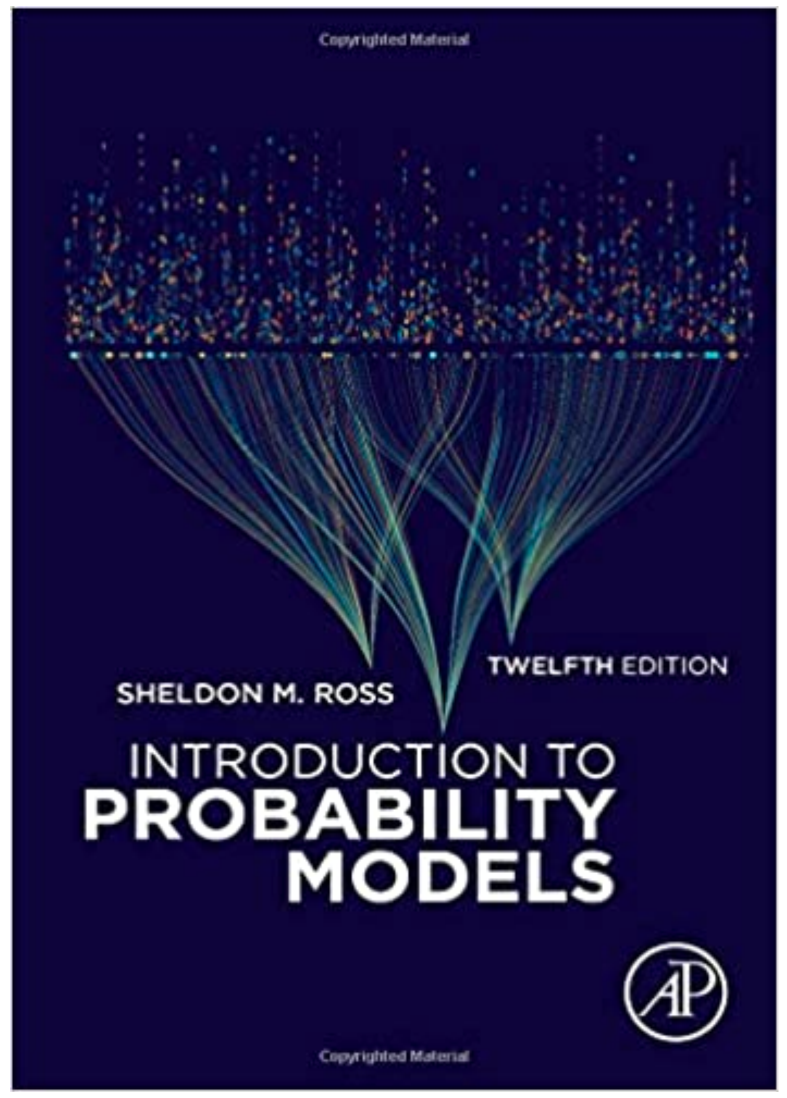
- 每周一 12:55 - 15:40 @ 东上院 107
- 任课教师：张驰豪（http://chihaozhang.com, chihao@sjtu.edu.cn）
- 助教：邱国良（guoliang.qiu@sjtu.edu.cn）
  陈厚双（chenhoushuang@sjtu.edu.cn）
- 课程主页：http://chihaozhang.com/teaching/SP2021spring
- Office hour: 每周一晚上7点-10点@软件学院1402-2

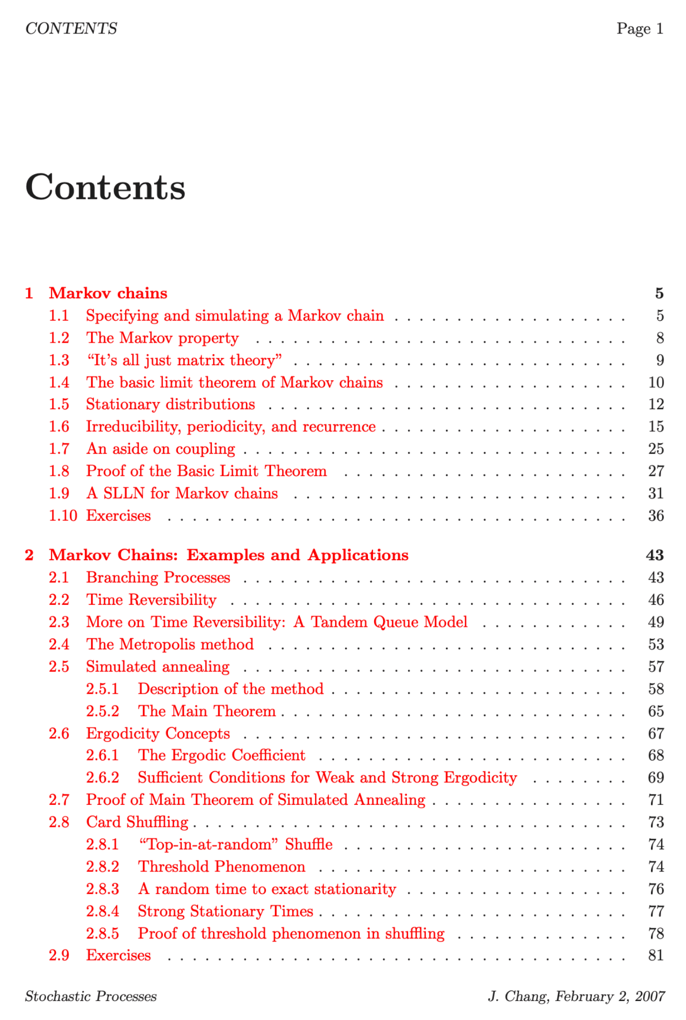
- 每两周一次作业

- 最终成绩=70%*平时作业+30%*期末考试

- 参考资料： 手写讲义 + pdf讲义+课程视频@canvas







Contents

一个知乎上的问题

知乎 首页 发现 等你来答 浙江新冠疫苗一针 200 元 提问

数学 概率论 随机过程 概率论与数理统计

和女朋友在商场走丢了，随机乱逛和守在特定地点等候，哪个相遇的概率更高?

1. 商场的地形比较复杂，空间也比较大。

2. 和女朋友互相生气，不存在打电话或者留下记号之类的手段。

3. 虽然生气了，但双方都想用装作偶遇的方式和解，所以不会离开商场，也不会到其他层。

4. 女朋友会继续逛，不存在静止不动的可能。

5. 急，在线等。

关注问题 写回答 邀请回答 好问题 1 26 条评论 分享 ··· 收起

（https://www.zhihu.com/question/310437394）

刘天任
CS Theory PhD (liutianren.com)

假设你和女朋友都是（完美的）无头苍蝇，且商场空间有对称性的话，两个人都随机乱逛比其中一个蹰着更好。

@Mather King 用平面上的布朗运动为模型。结论是双方均随机运动可使相遇时间减半。

我来补充个离散建模，也能得到同样的结果。

用二维网格上的随机漫步（random walk）来模拟随机乱逛的人。记男友在 t 时刻位于坐标为 X_t ，女友 t 时刻位于坐标 Y_t 。不失一般性，设 $X_0 = (0,0)$ 。每过单位时间，两人都随机运动到旁边的一个整点。严格地说，记 $\Delta X_t := X_t - X_{t-1}$ ，$\Delta Y_t := Y_t - Y_{t-1}$ ，则 $\Delta X_1, \Delta X_2, \ldots, \Delta Y_1, \Delta Y_2, \ldots$ 为 $\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$ 上的 i.i.d. 均匀分布。

刘天任
CS Theory PhD (liutianren.com)

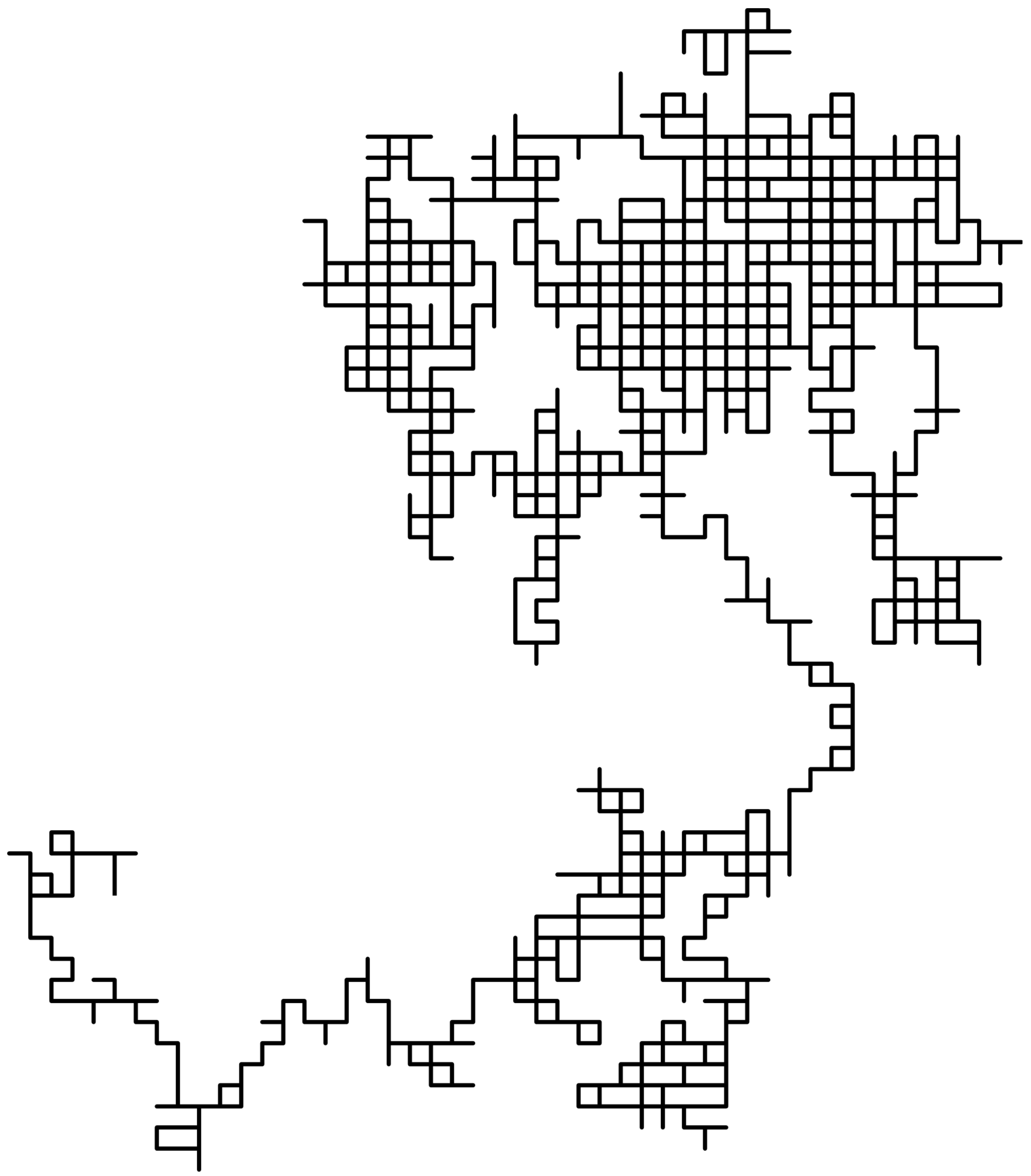
Heng Guo、Chao Xu 等 526 人赞同了该回答

假设你和女朋友都是（完美的）无头苍蝇，且商场空间有对称性的话，两个人都随机乱逛比其中一个蹲着更好。

@Mather King 用平面上的布朗运动为模型。结论是双方均随机运动可使相遇时间减半。

我来补充个离散建模，也能得到同样的结果。

用二维网格上的随机漫步（random walk）来模拟随机乱逛的人。记男友在 t 时刻位于坐标为 X_t ，女友 t 时刻位于坐标 Y_t 。不失一般性，设 $X_0 = (0,0)$ 。每过单位时间，两人都随机运动到旁边的一个整点。严格地说，记 $\Delta X_t := X_t - X_{t-1}$ ，$\Delta Y_t := Y_t - Y_{t-1}$ ，则 $\Delta X_1, \Delta X_2, \ldots, \Delta Y_1, \Delta Y_2, \ldots$ 为 $\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$ 上的 i.i.d. 均匀分布。



刘天任
CS Theory PhD (liutianren.com)

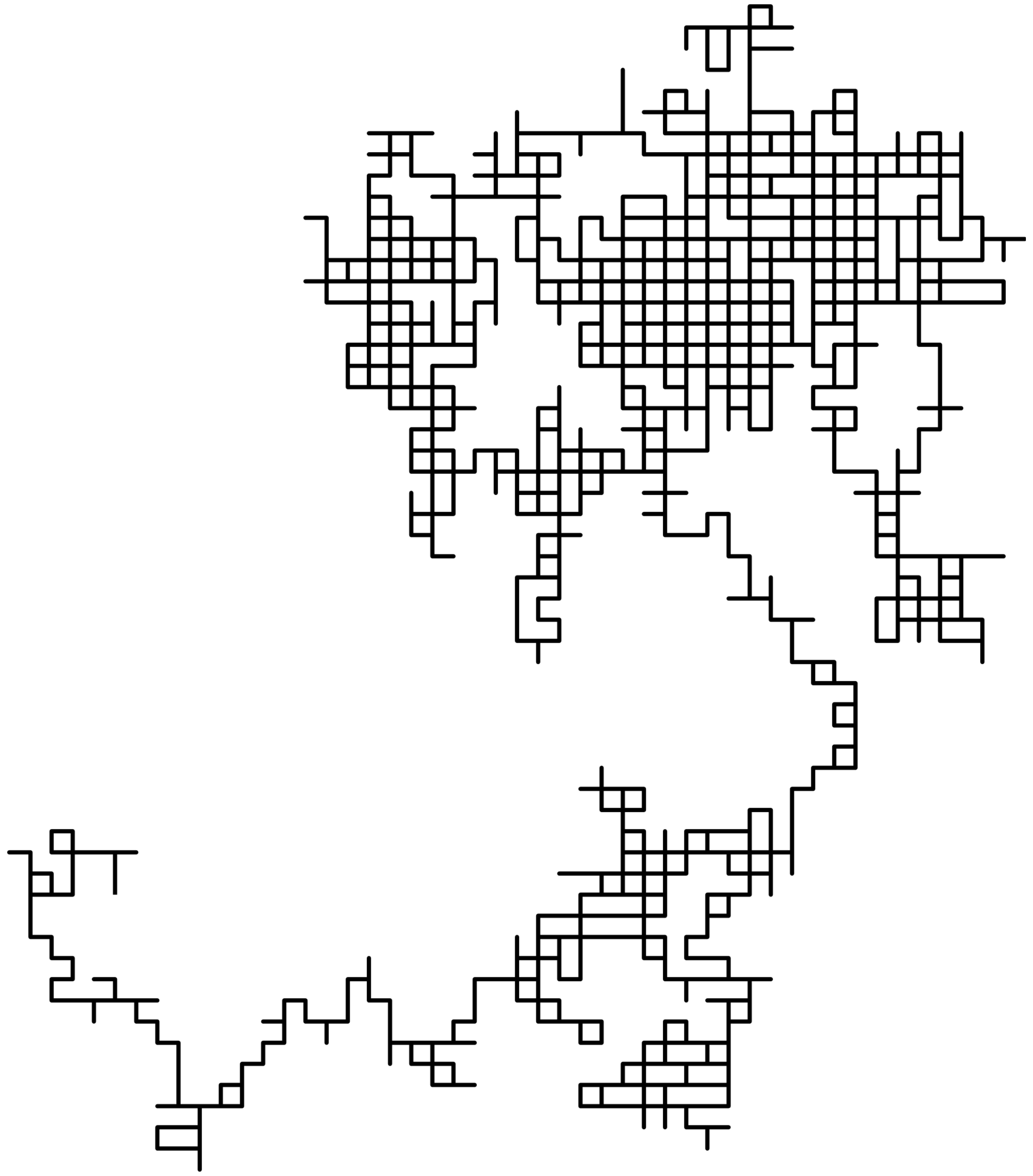
Heng Guo、Chao Xu 等 526 人赞同了该回答

假设你和女朋友都是（完美的）无头苍蝇，且商场空间有对称性的话，两个人都随机乱逛比其中一个蹲着更好。

@Mather King 用平面上的布朗运动为模型。结论是双方均随机运动可使相遇时间减半。

我来补充个离散建模，也能得到同样的结果。

用二维网格上的随机漫步（random walk）来模拟随机乱逛的人。记男友在 t 时刻位于坐标为 X_t ，女友 t 时刻位于坐标 Y_t 。不失一般性，设 $X_0 = (0,0)$ 。每过单位时间，两人都随机运动到旁边的一个整点。严格地说，记 $\Delta X_t := X_t - X_{t-1}$ ，$\Delta Y_t := Y_t - Y_{t-1}$ ，则 $\Delta X_1, \Delta X_2, \ldots, \Delta Y_1, \Delta Y_2, \ldots$ 为 $\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$ 上的 i.i.d. 均匀分布。



随机游走：离散时间马尔可夫链

Mather King
数学话题下的优秀回答者

离散空间，尤其是离散时间的模型，处理这种问题特别麻烦，不如考虑一个连续模型。

商场看作R^2，两个人初始分别在(0,0), (1,0). 其中一个人做标准布朗运动，或者两个人分别做独立的标准布朗运动。当两人的距离小于某个小常数，比如0.01时，视为相遇。由于二维布朗运动是邻域常返的，两人一定能相遇。

如果一个人动，另一个不动，二者的坐标差的变化就是一个标准布朗运动。如果两个人都动，坐标差的变化是两个独立标准布朗运动的和，相当于标准布朗运动的方差加倍。这等效于一个人以两倍的速度动，另一个不动，相遇用时自然减半。

简言之，一个一倍速的布朗运动，观测另一个独立的一倍速的布朗运动，看到的其实是个二倍速的布朗运动。

总之结论是随机乱逛更好，能节约一半的时间。

Mather King
数学话题下的优秀回答者

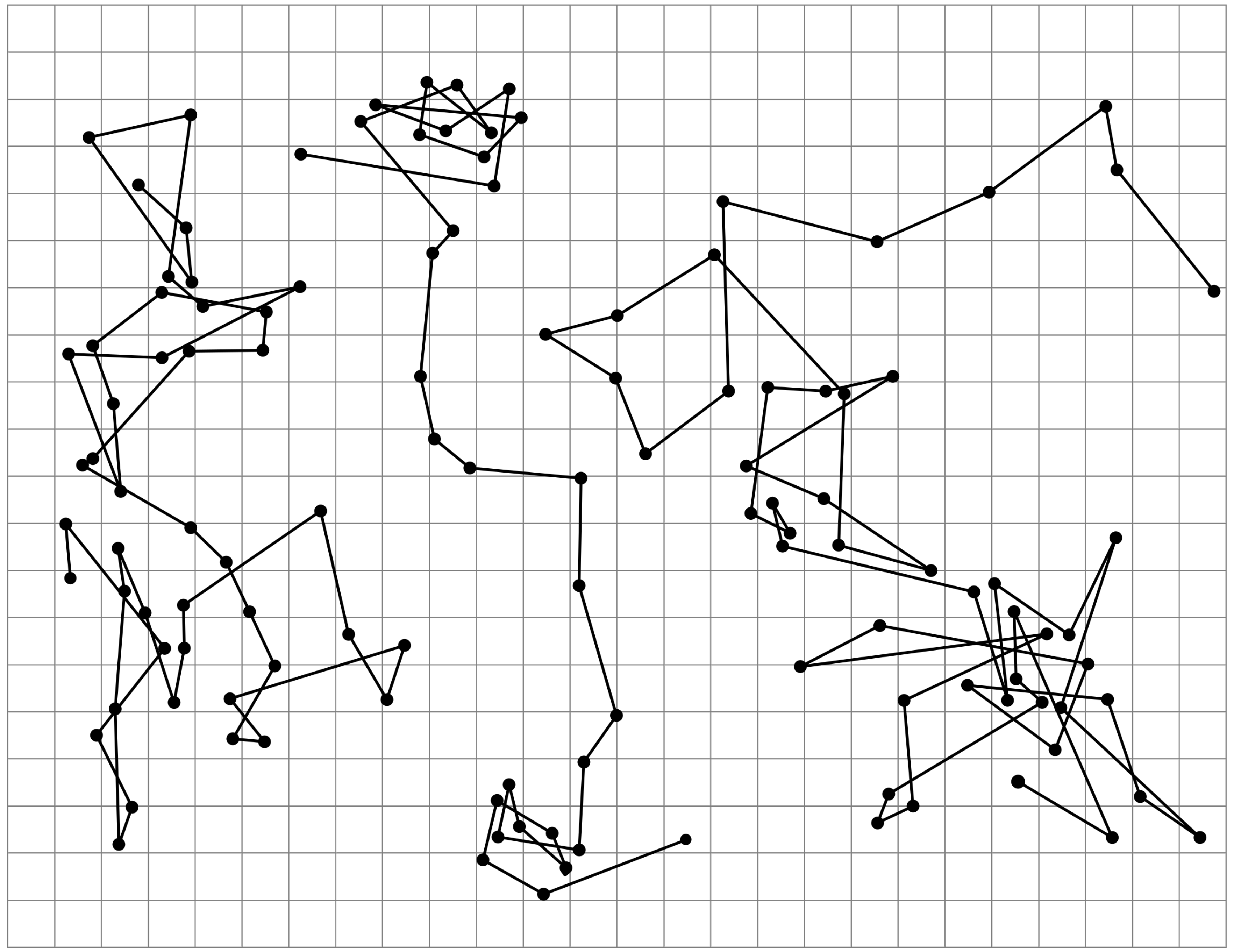
离散空间，尤其是离散时间的模型，处理这种问题特别麻烦，不如考虑一个连续模型。

商场看作R^2，两个人初始分别在(0,0), (1,0). 其中一个人做标准布朗运动，或者两个人分别做独立的标准布朗运动。当两人的距离小于某个小常数，比如0.01时，视为相遇。由于二维布朗运动是邻域常返的，两人一定能相遇。

如果一个人动，另一个不动，二者的坐标差的变化就是一个标准布朗运动。如果两个人都动，坐标差的变化是两个独立标准布朗运动的和，相当于标准布朗运动的方差加倍。这等效于一个人以两倍的速度动，另一个不动，相遇用时自然减半。

简言之，一个一倍速的布朗运动，观测另一个独立的一倍速的布朗运动，看到的其实是个二倍速的布朗运动。

总之结论是随机乱逛更好，能节约一半的时间。



Mather King
数学话题下的优秀回答者

2,390 人赞同了该回答

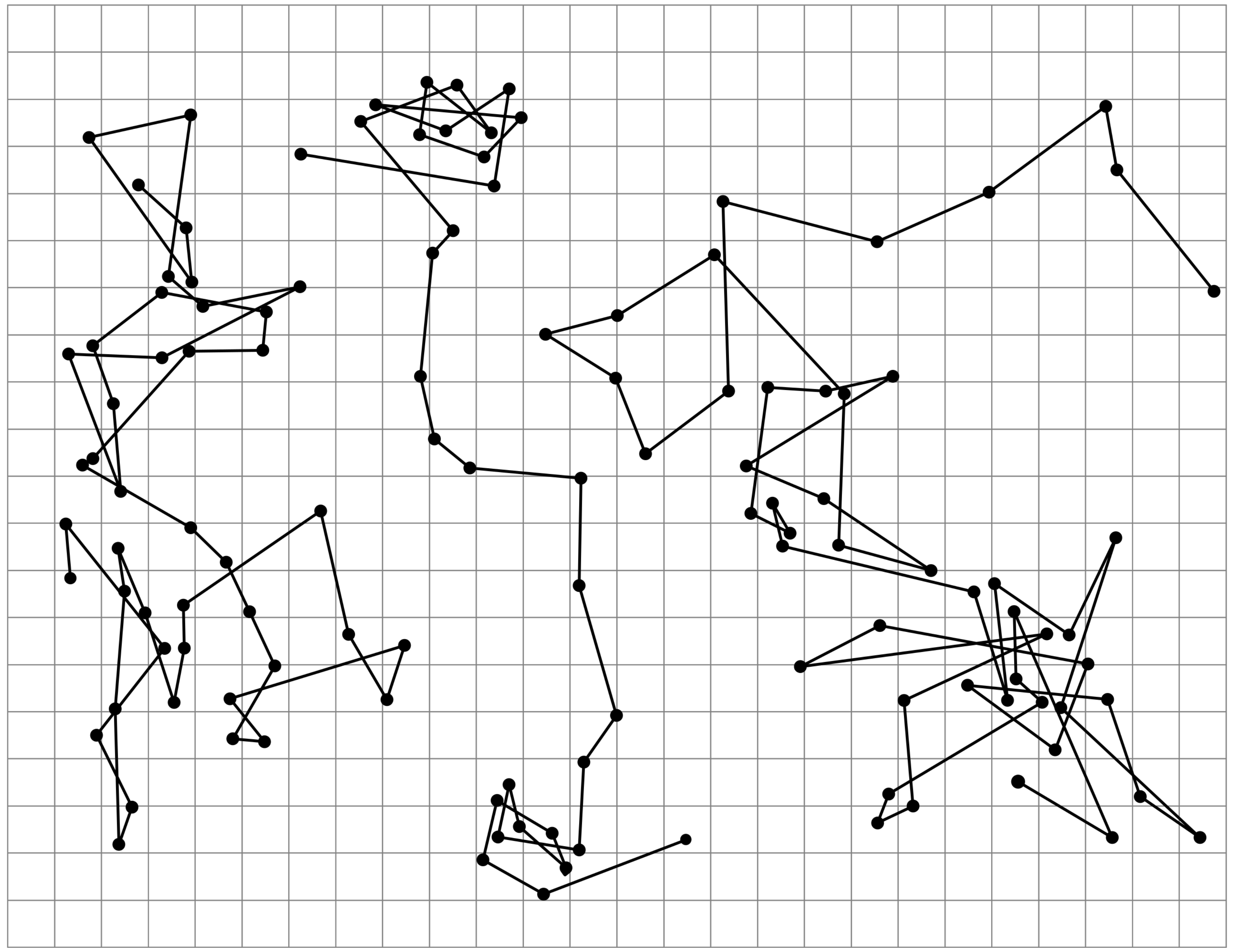
离散空间，尤其是离散时间的模型，处理这种问题特别麻烦，不如考虑一个连续模型。

商场看作R^2，两个人初始分别在(0,0), (1,0). 其中一个人做标准布朗运动，或者两个人分别做独立的标准布朗运动。当两人的距离小于某个小常数，比如0.01时，视为相遇。由于二维布朗运动是邻域常返的，两人一定能相遇。

如果一个人动，另一个不动，二者的坐标差的变化就是一个标准布朗运动。如果两个人都动，坐标差的变化是两个独立标准布朗运动的和，相当于标准布朗运动的方差加倍。这等效于一个人以两倍的速度动，另一个不动，相遇用时自然减半。

简言之，一个一倍速的布朗运动，观测另一个独立的一倍速的布朗运动，看到的其实是个二倍速的布朗运动。

总之结论是随机乱逛更好，能节约一半的时间。



布朗运动（Brownian Motion）

一些机器学习中的应用

猜天气

猜天气

天气矩阵 A:

	晴天	阴天	下雨
晴天	a_{11}	a_{12}	a_{13}
阴天	a_{21}	a_{22}	a_{23}
下雨	a_{31}	a_{32}	a_{33}

猜天气

天气矩阵 A:

	晴天	阴天	下雨
晴天	a_{11}	a_{12}	a_{13}
阴天	a_{21}	a_{22}	a_{23}
下雨	a_{31}	a_{32}	a_{33}

行为矩阵 B:

	宅	出门
晴天	b_{11}	b_{12}
阴天	b_{21}	b_{22}
下雨	b_{31}	b_{32}

猜天气

天气矩阵 A:

	晴天	阴天	下雨
晴天	a_{11}	a_{12}	a_{13}
阴天	a_{21}	a_{22}	a_{23}
下雨	a_{31}	a_{32}	a_{33}

行为矩阵 B:

	宅	出门
晴天	b_{11}	b_{12}
阴天	b_{21}	b_{22}
下雨	b_{31}	b_{32}

观测行为:

宅出出宅出出宅出宅宅出…

猜天气

天气矩阵 A:

	晴天	阴天	下雨
晴天	a_{11}	a_{12}	a_{13}
阴天	a_{21}	a_{22}	a_{23}
下雨	a_{31}	a_{32}	a_{33}

观测行为:

宅出出宅出出宅出宅宅出...

行为矩阵 B:

	宅	出门
晴天	b_{11}	b_{12}
阴天	b_{21}	b_{22}
下雨	b_{31}	b_{32}

猜测 A、B与第一天的天气分布

猜天气

天气矩阵 A:

	晴天	阴天	下雨
晴天	a_{11}	a_{12}	a_{13}
阴天	a_{21}	a_{22}	a_{23}
下雨	a_{31}	a_{32}	a_{33}

观测行为:

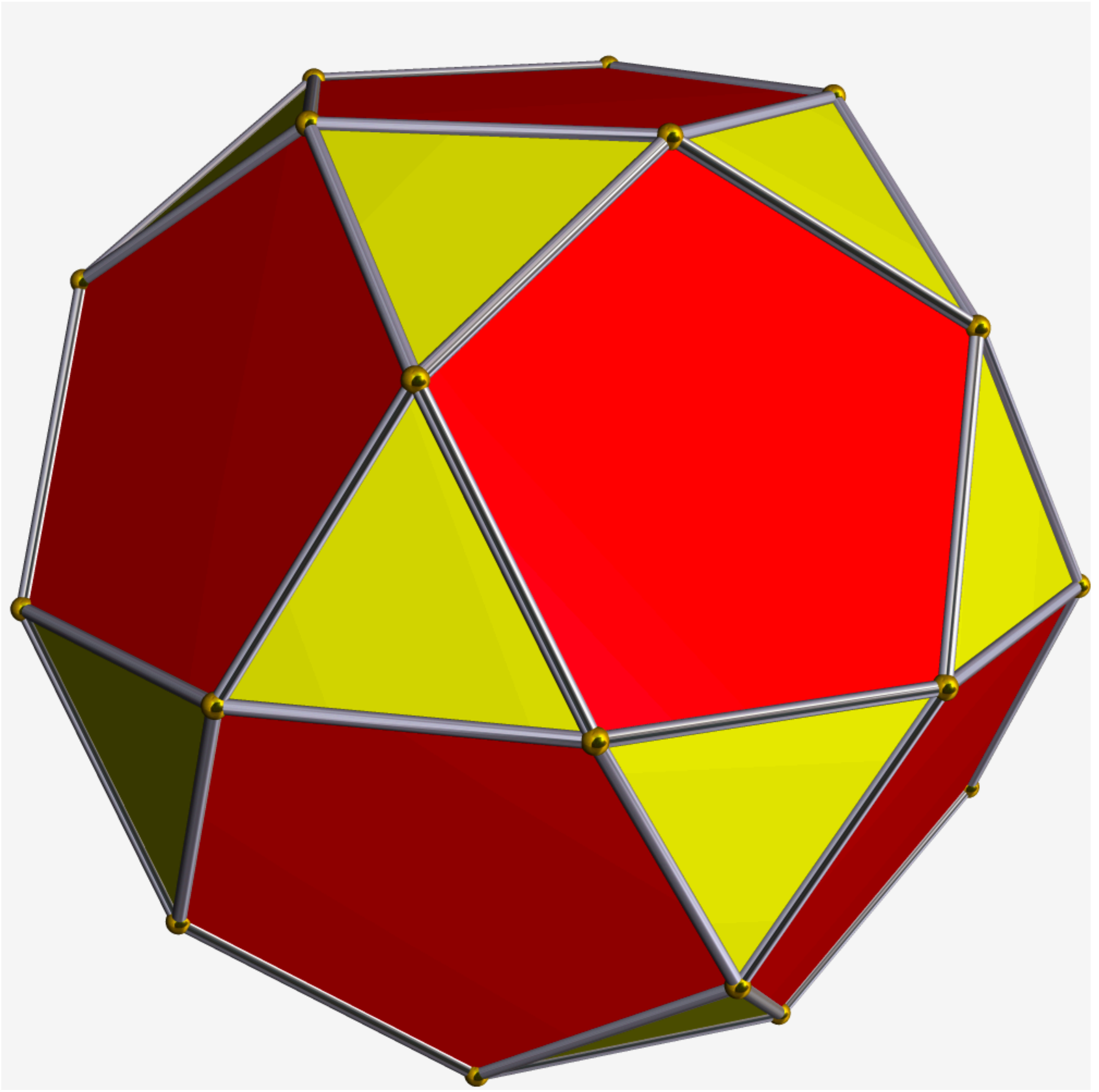
宅出出宅出出宅出宅宅出…

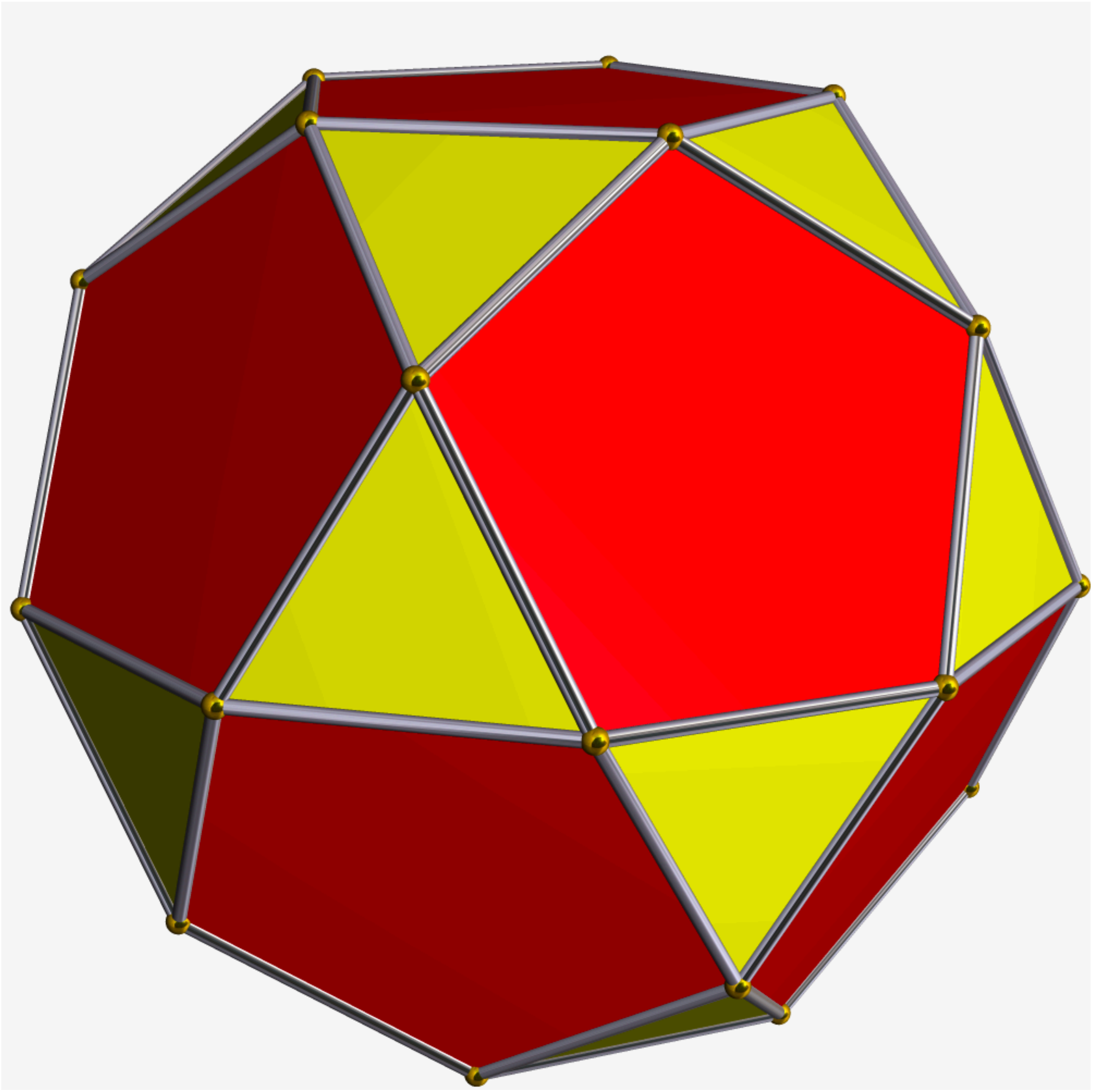
隐马尔可夫模型（Hidden Markov Model）

行为矩阵 B:

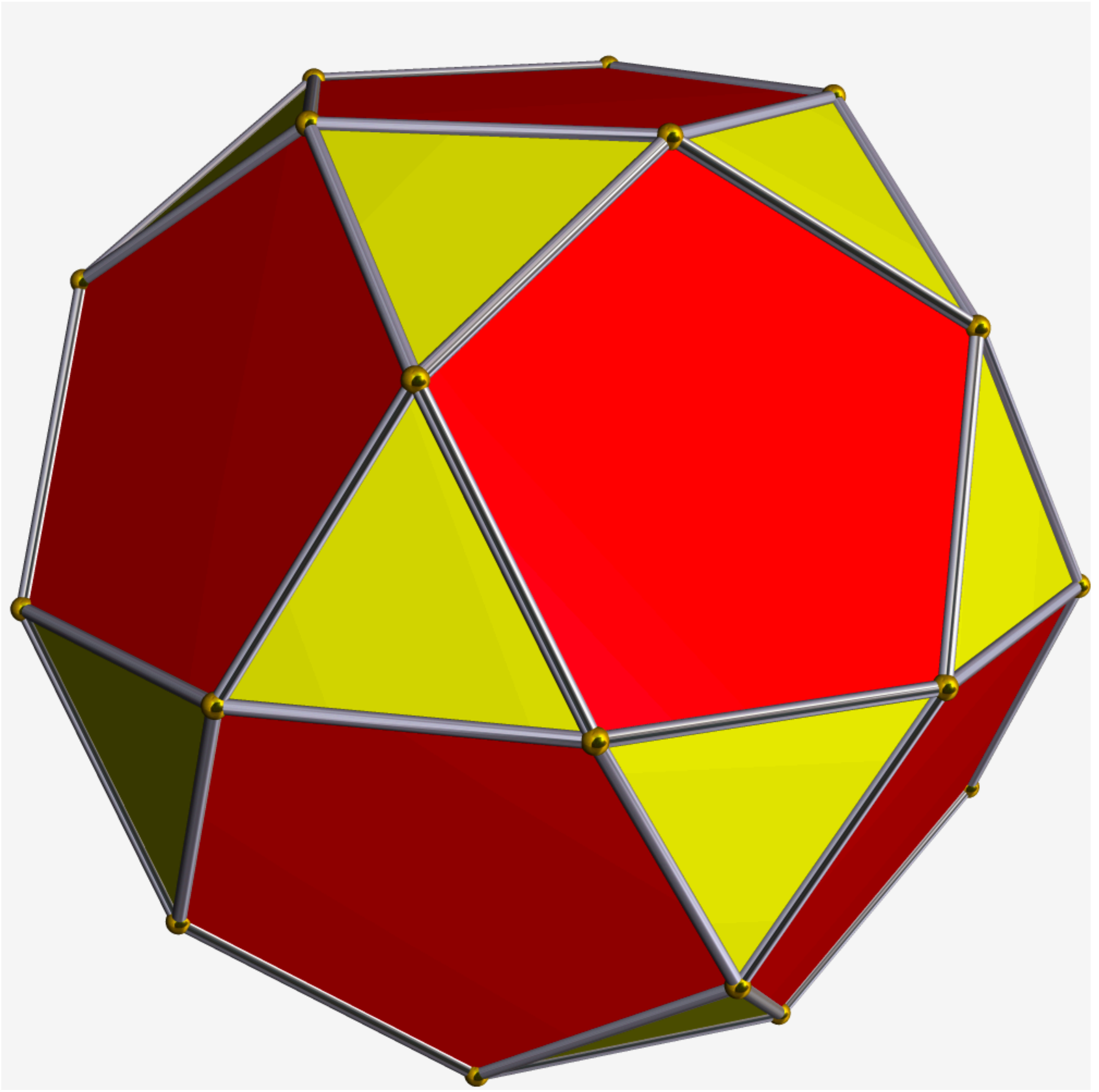
	宅	出门
晴天	b_{11}	b_{12}
阴天	b_{21}	b_{22}
下雨	b_{31}	b_{32}

猜测 A、B与第一天的天气分布



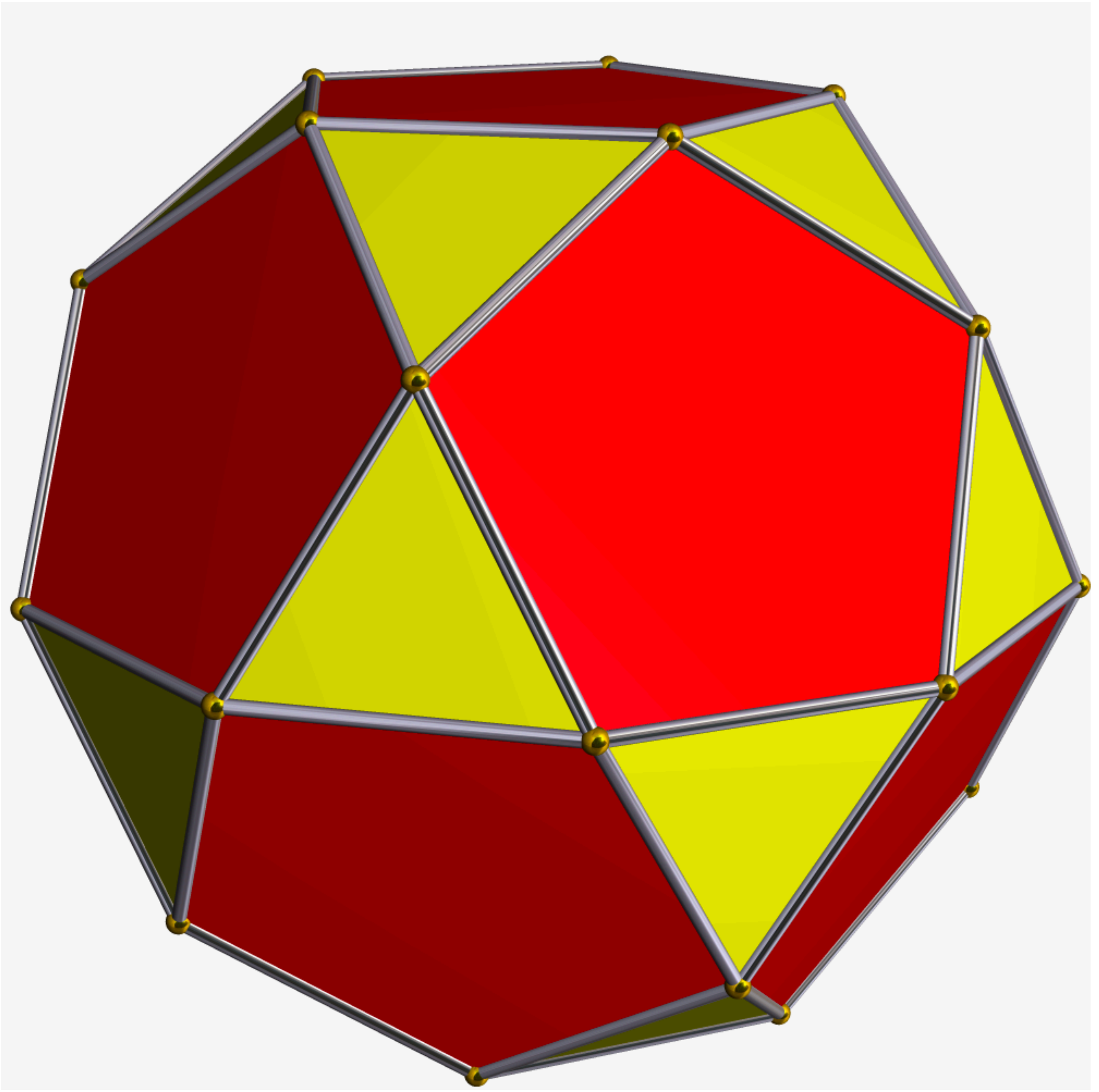


给定一个凸集 P，和一个 membership oracle



给定一个凸集 P，和一个 membership oracle

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } \ x \in P \\ 0, & \text{if } \ x \notin P \end{cases}$$



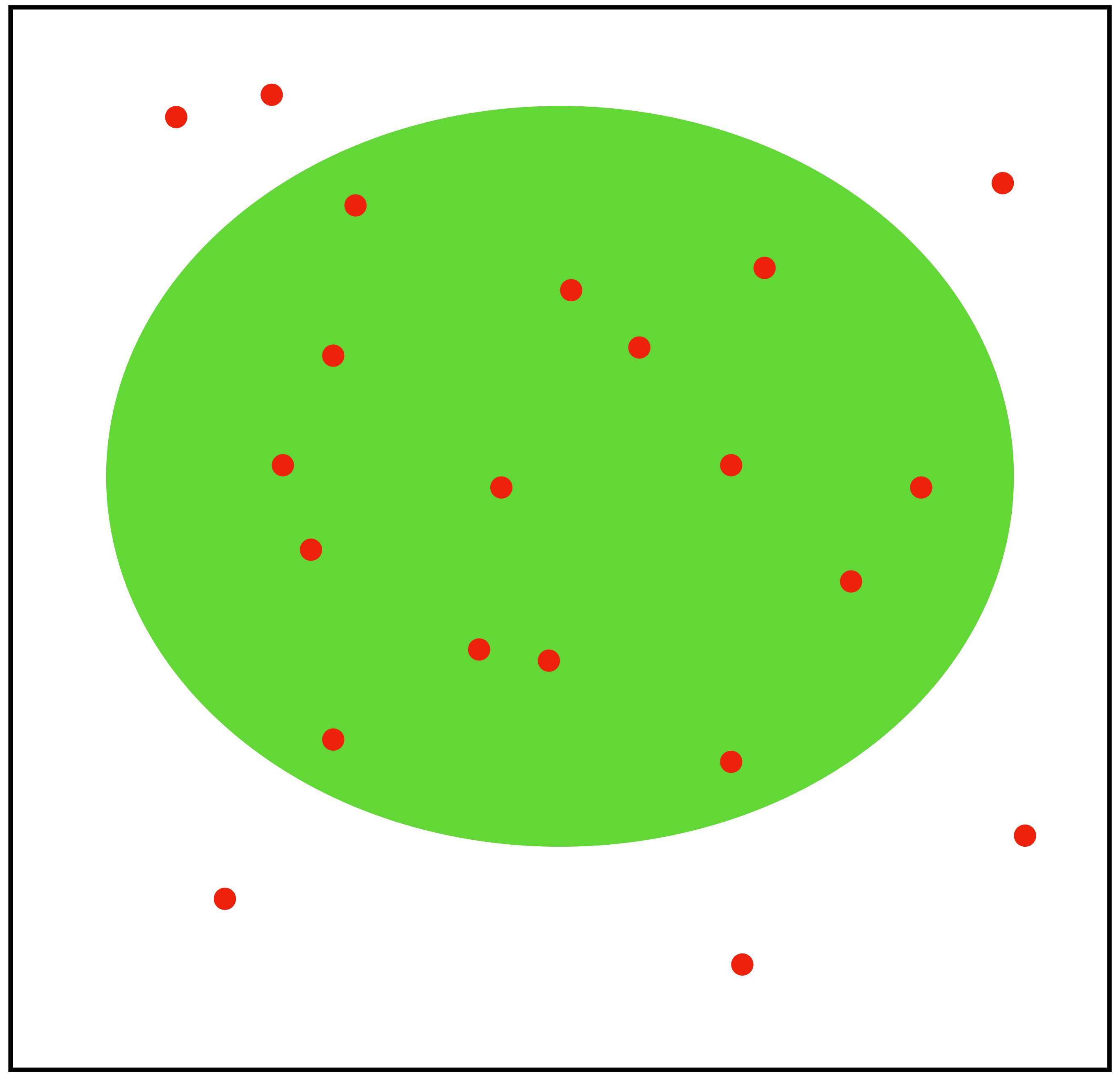
给定一个凸集 P，和一个 membership oracle

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in P \\ 0, & \text{if } x \notin P \end{cases}$$

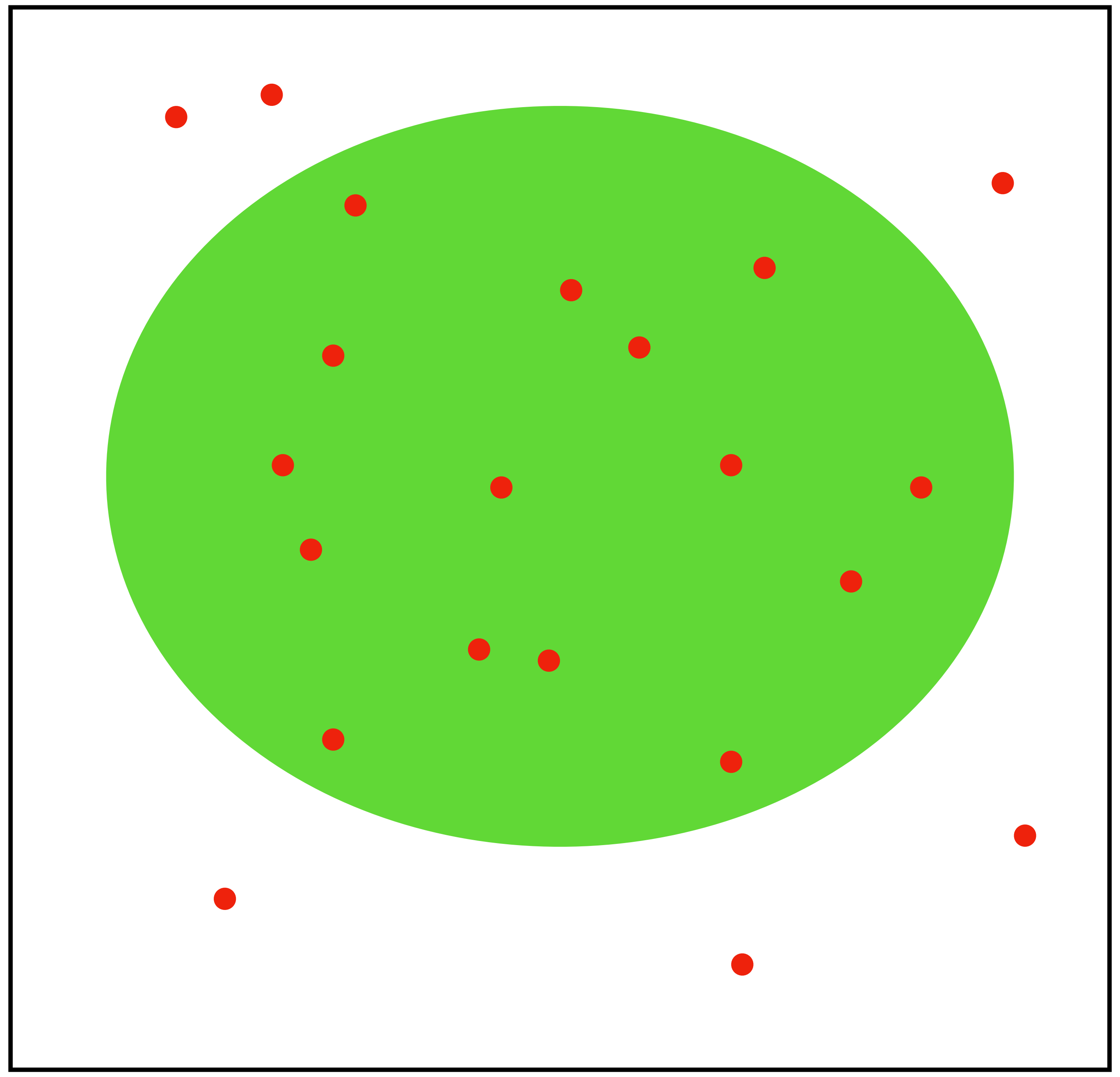
如何计算 P 的体积？

方法一：蒙特卡洛法

方法一：蒙特卡洛法

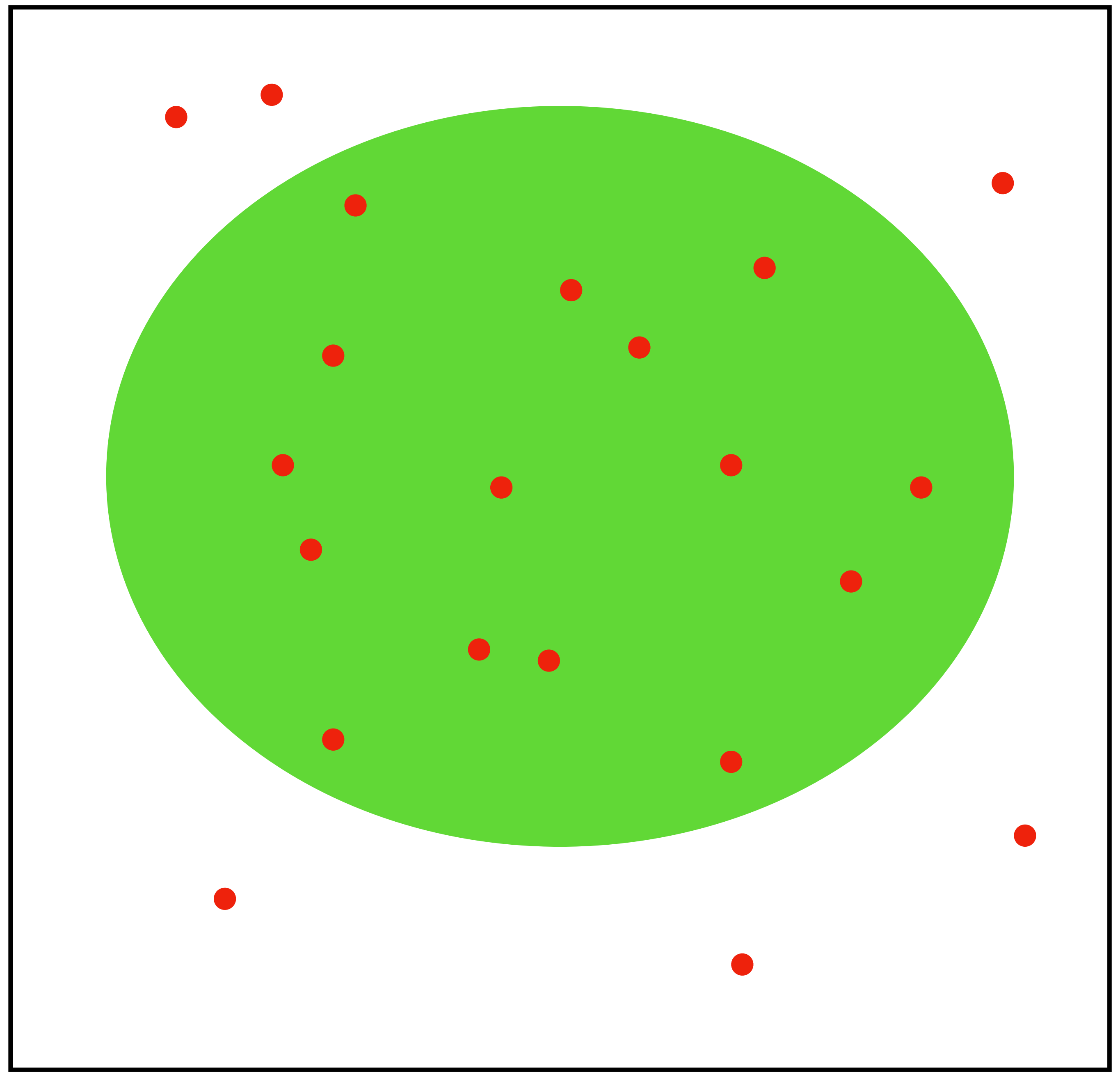


方法一：蒙特卡洛法



高维诅咒（curse of dimensionality）：

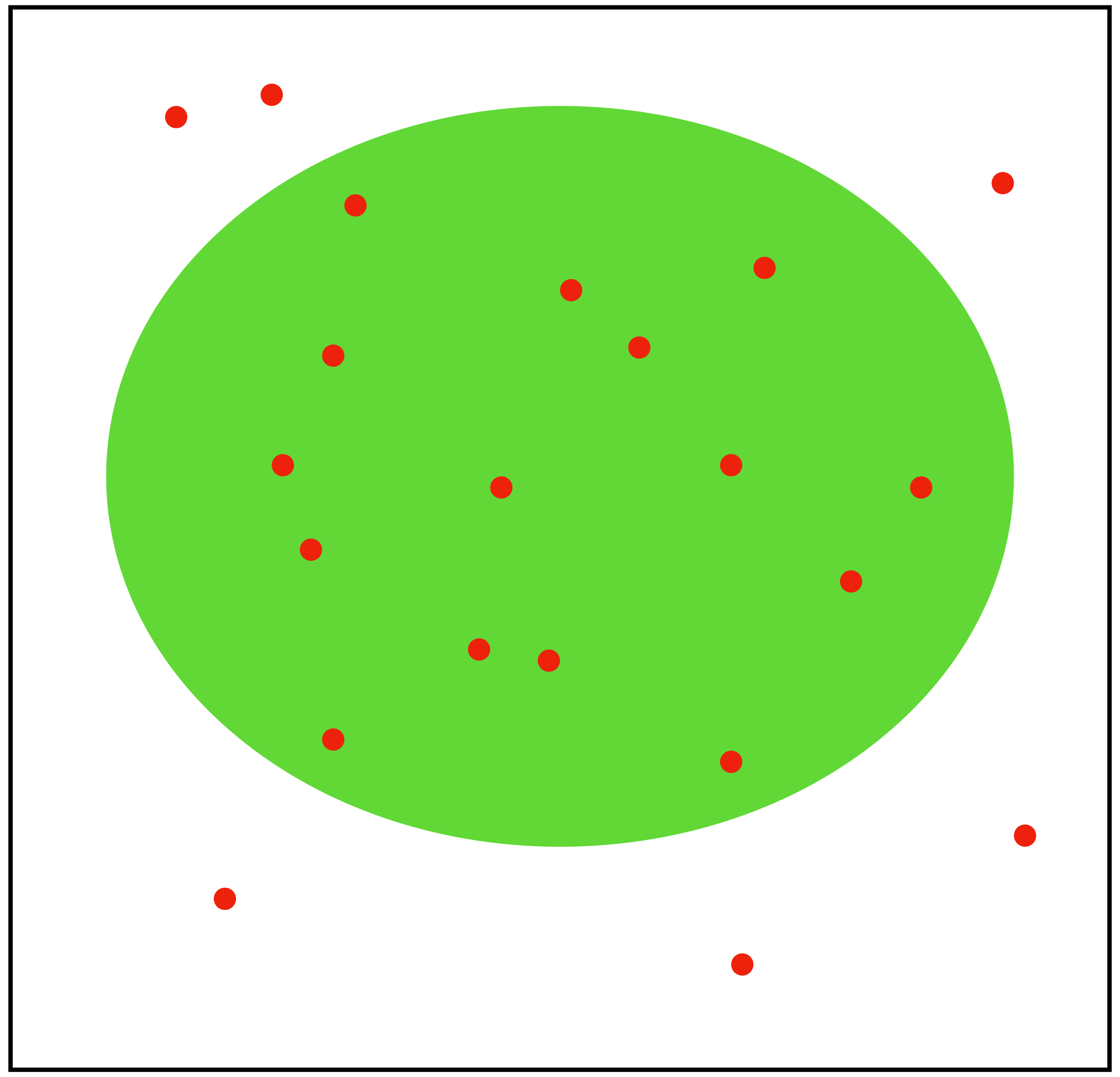
方法一：蒙特卡洛法



高维诅咒（curse of dimensionality）：

n 维单位球体积 $= O(R^n)$

方法一：蒙特卡洛法



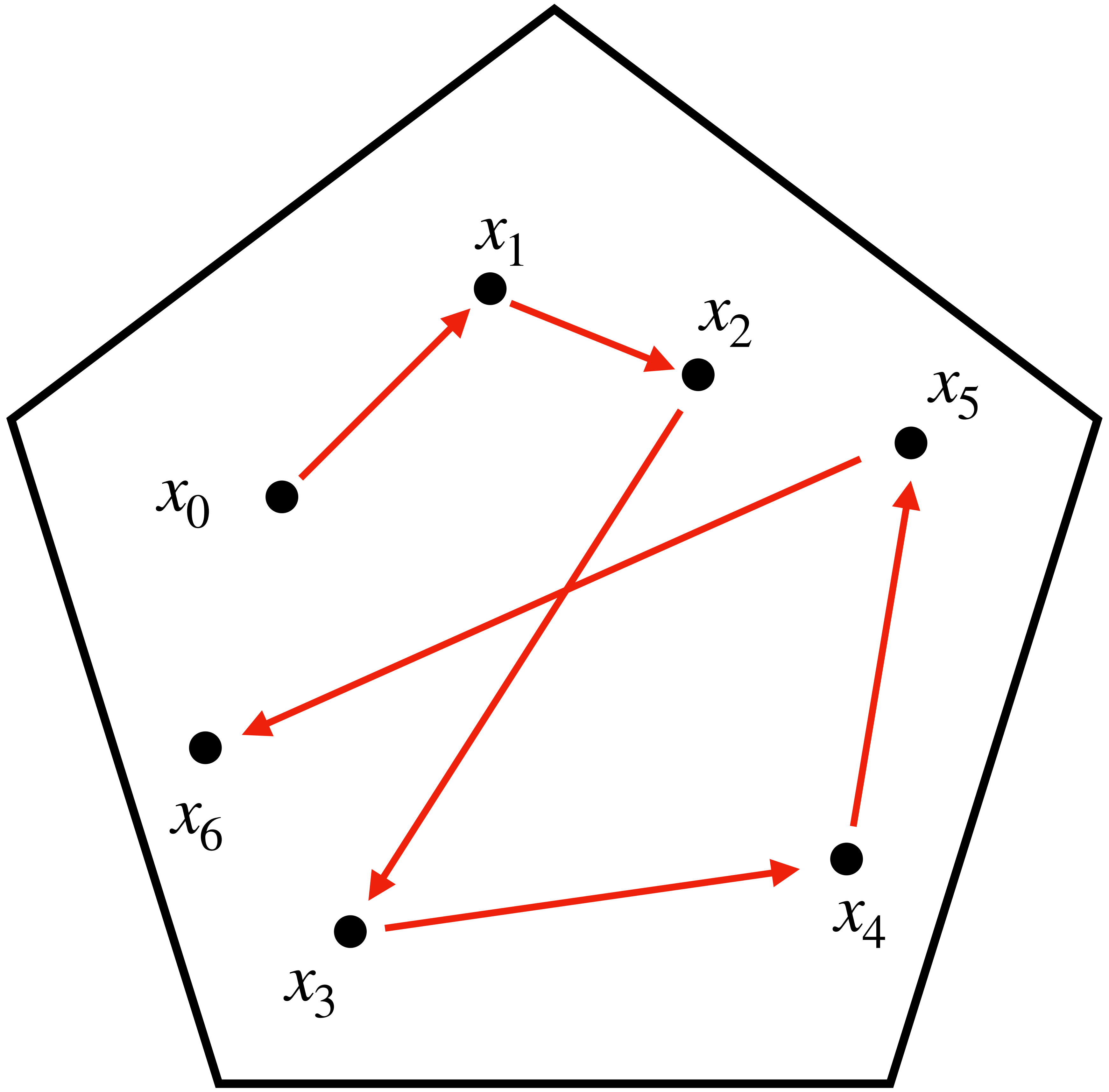
高维诅咒（curse of dimensionality）：

n 维单位球体积 $=O(R^n)$

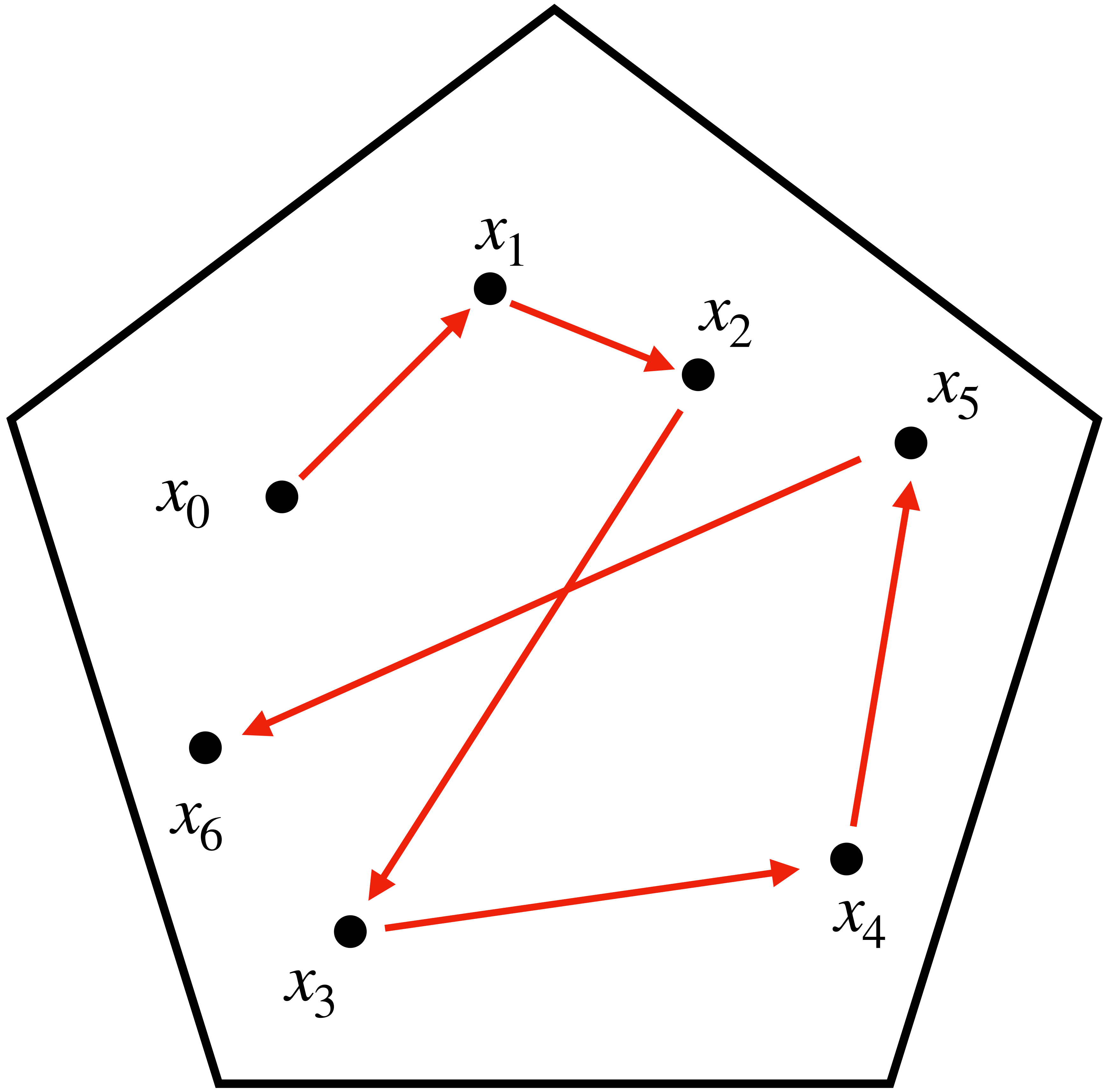
需要至少 $2^{\Omega(n)}$ 个样本

方法二：马尔可夫链蒙特卡洛法

方法二：马尔可夫链蒙特卡洛法

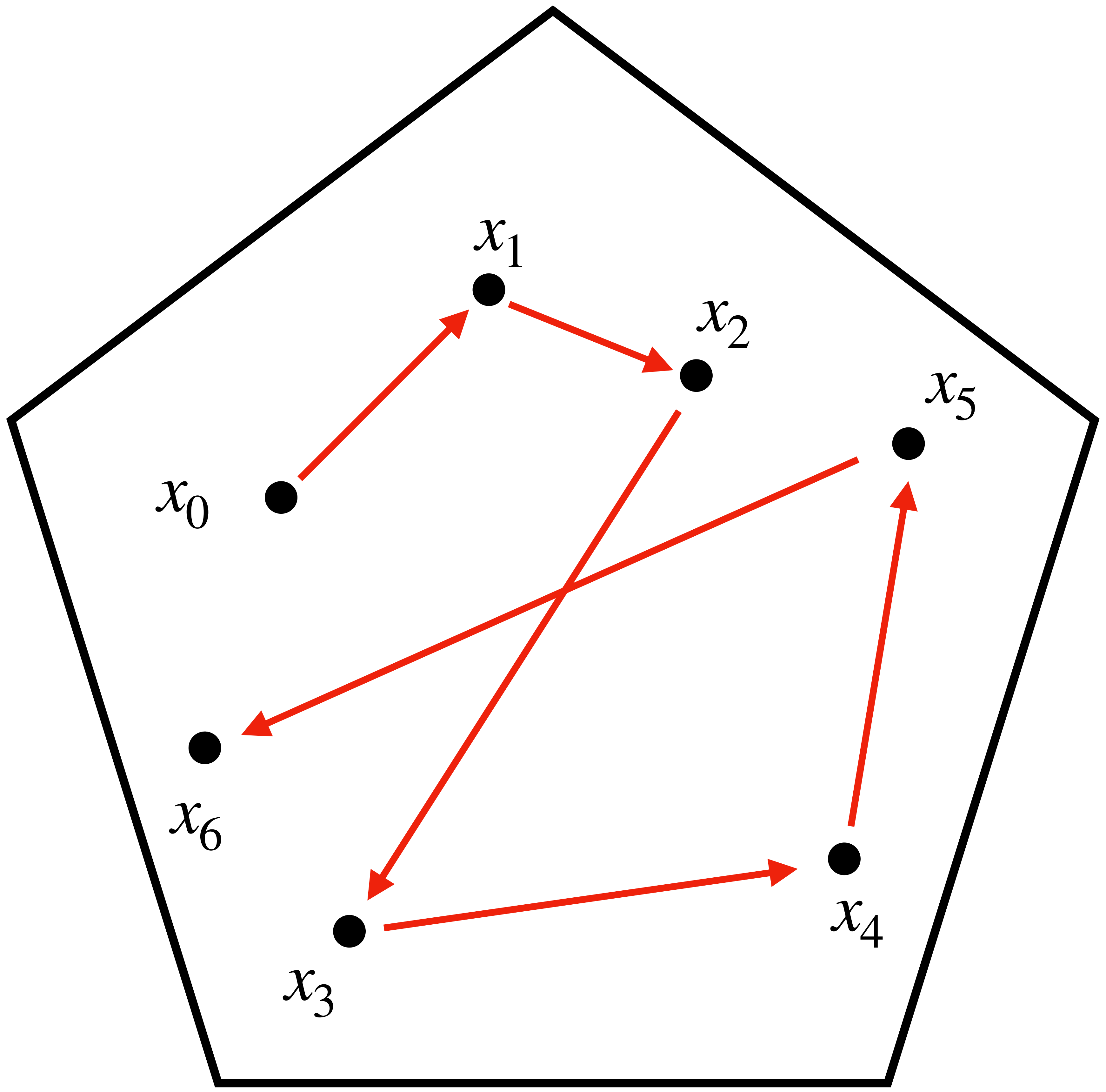


方法二：马尔可夫链蒙特卡洛法



Ball Walk

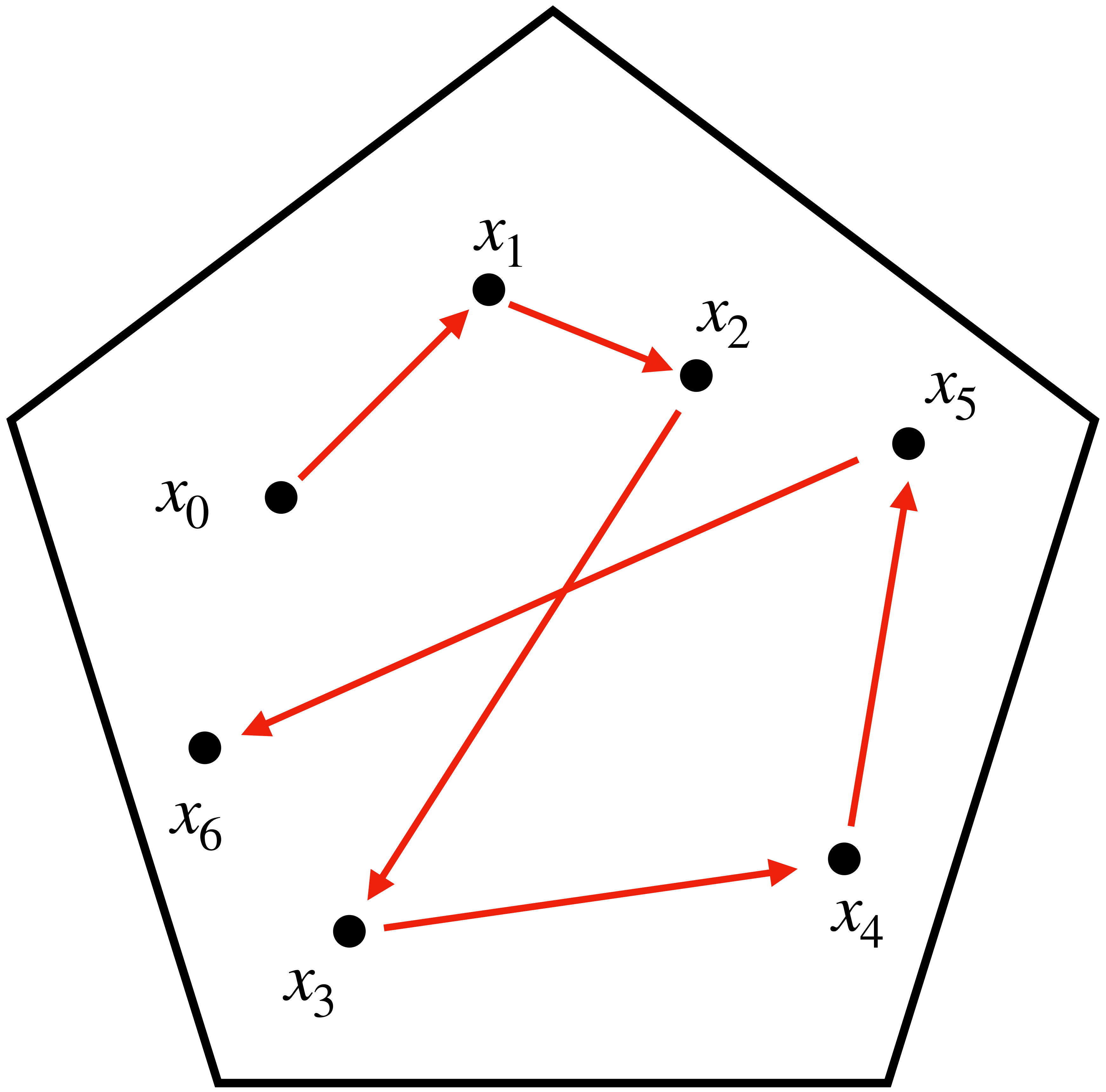
方法二：马尔可夫链蒙特卡洛法



Ball Walk

$$x_{t+1} = x_t + R_t, \quad R_t \in_R \mathrm{Ball}(0,r)$$

方法二：马尔可夫链蒙特卡洛法

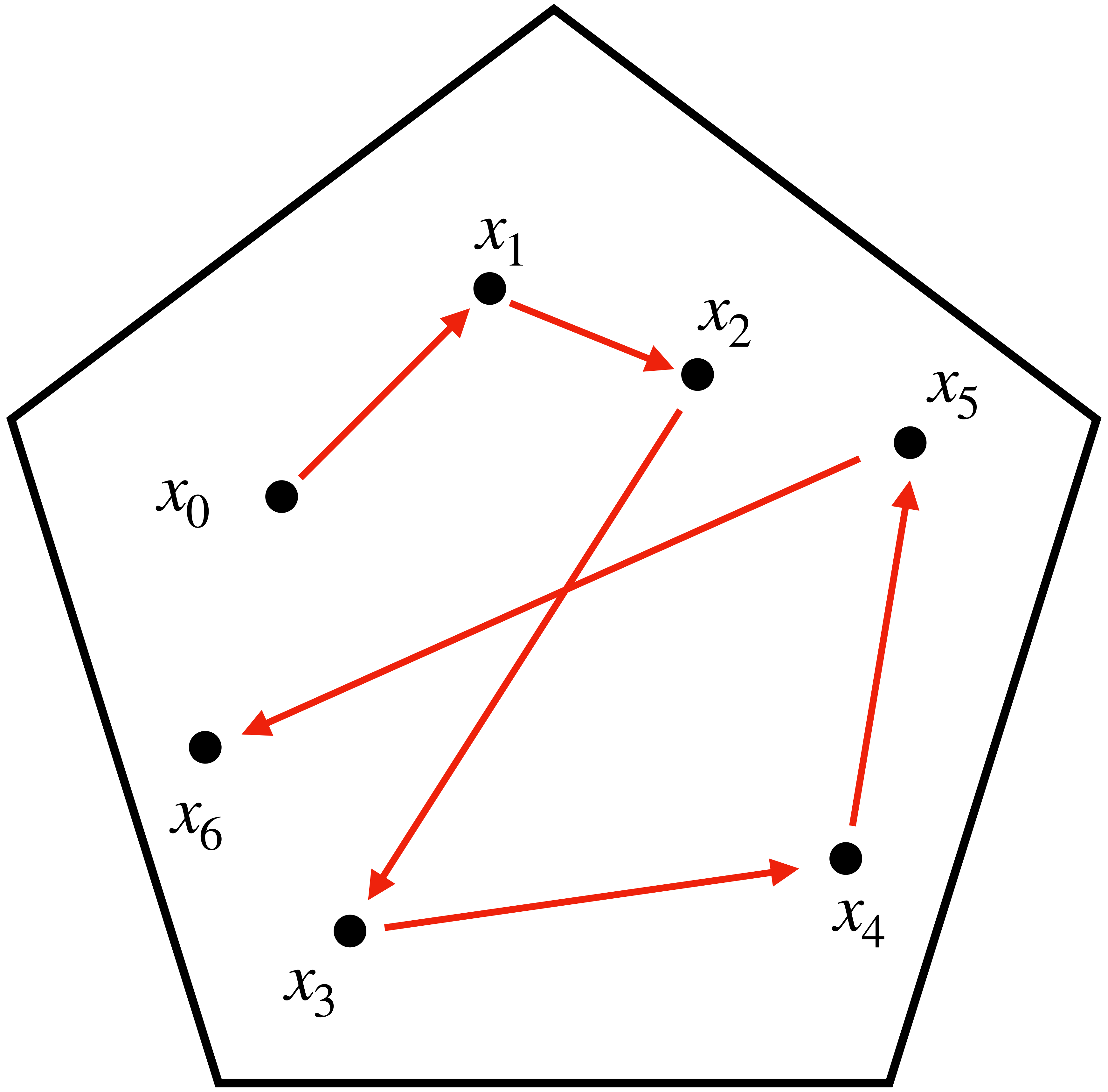


Ball Walk

$$x_{t+1} = x_t + R_t, \quad R_t \in_R \mathrm{Ball}(0, r)$$

多项式步收敛！

方法二：马尔可夫链蒙特卡洛法



Ball Walk

$$x_{t+1} = x_t + R_t, \quad R_t \in_R \mathrm{Ball}(0,r)$$

多项式步收敛！

马尔可夫过程（Markov Process）

AI2613是

- 马尔可夫链（离散/连续）
- 泊松过程
- 马尔可夫过程
- 布朗运动
- …

传统随机过程

+

AI/大数据/机器学习中的算法应用